

Dev n° 28

Ref: Gardon "Analyse"

v2 p 330.

v3 p 350 exo 5.

Titre: Fonctions strictement monotonesDef:Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e. Euclidien de dim finie n , et $\|\cdot\|$ norme associée.Soit $f: E \rightarrow E$ strictement monotone, c-a-d $\exists k > 0$ t.q.

$$\forall (x, y) \in E^2; \quad \langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq k \|x - y\|^2. \quad (*)$$

Thm:

On a:

① Si $f \in \mathcal{C}^1(E)$.Alors, f vérifie $(*)$ $\Leftrightarrow \forall x \in E, \forall h \in E, \langle df_x(h), h \rangle \geq k \|h\|^2$ ② Si $f \in \mathcal{C}^1(E)$ et strictement monotone.Alors, f est un $\mathcal{C}^1$ -difféo de E sur E .Démon:

① Proccedons par double implication.

$$\Rightarrow \text{Si } f \text{ vérifie } (*) \text{ alors } \forall x \in E, \forall h \in E; \forall t \in \mathbb{R}^*,$$

$$\langle f(x+th) - f(x), th \rangle \geq kt^2 \|h\|^2. \quad \downarrow t \in \mathbb{R}^*$$

$$\Rightarrow \langle f(x+th) - f(x), h \rangle \geq k \|h\|^2$$

$$\begin{array}{c} t \\ \hline \xrightarrow{f} \langle df_x(h), h \rangle \end{array}$$

$$\Rightarrow \langle df_x(h), h \rangle \geq k \|h\|^2$$

$$\Leftarrow \text{On a } \forall x \in E, \forall h \in E, \langle df_x(h), h \rangle \geq k \|h\|^2$$

Soient $x, h \in E$.

$$\text{Soit } \ell: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle f(x+th), h \rangle.$$

On a:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \ell'(t) = \langle df_{x+th}(h), h \rangle \geq k \|h\|^2$$

Donc,

$$\ell(1) - \ell(0) \geq k \|h\|^2 \quad (\Leftrightarrow) \quad \langle f(x+h) - f(x), h \rangle \geq k \|h\|^2$$

par TAF

② Par le thm d'inversion globale il faut m.q.:

) $\forall x \in E, df_x$ inversible) f bijective de E sur E *) m.q. $\forall x \in E, df_x$ inversible:Soit $x \in E$.

$$\text{On a : } \langle df_x(h), h \rangle \geq k \|h\|^2 \quad \forall h \in E.$$

$$\text{On a alors } \forall h \neq 0, \quad df_x(h) \neq 0.$$

Donc, df_x injective.

On a alors $\forall h \neq 0, \quad df_x(h) \neq 0$.

Donc, df_x injective.

Donc bijective comme endo de dim finie

Donc inversible.

*) 17.9 f bijective de E dans E :

↳ La relation (*) $\Rightarrow$ injectif.

↳ 17.9 f surjective.

E est connexe donc on doit m.q. $f(E)$ est un ouvert fermé de E .

• On a $\forall x \in E, df_x$ inversible donc f est ouverte.

Donc, $f(E)$ ouvert de E comme image d'un ouvert par une fct ouverte.

• 17.9 $f(E)$ est fermé en montrant $f(E)$ complet:

On a:

$$\begin{aligned} | \langle f(x) - f(y), x - y \rangle | &\leq \|x - y\| \cdot \|f(x) - f(y)\| && \text{(Cauchy-Schwarz)} \\ \stackrel{(*)}{\Rightarrow} k \|x - y\|^2 &\leq \|x - y\| \cdot \|f(x) - f(y)\| \\ \Rightarrow \|x - y\| &\leq \frac{\|f(x) - f(y)\|}{k} && (**). \end{aligned}$$

Soit $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $f(E)$.

D'après (**),

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad \|x_p - x_q\| \leq \frac{\|f(x_p) - f(x_q)\|}{k}$$

Donc, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de Cauchy de E avec E complet (car $\mathbb{R}$ -c.v.)

Donc, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ c.v vers $x \in E$.

Alors, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ car $f \in \mathcal{C}^1$.
 $\cap f(E)$

Donc, $(f(x_n))_n$ c.v dans $f(E)$.

Donc $f(E)$ complet.

Donc $f(E)$ fermé.

Donc f bij.

CCL: $f \in \mathcal{C}^1$ difféo par le thm d'inversion globale $\square$

Annexe:

* COROLLAIRE 1. Soient E et F deux espaces de Banach, et U un ouvert de E . Soit $f: U \rightarrow F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in U$, df_x soit inversible et bicontinu. Alors f est une application ouverte, c'est-à-dire que pour tout ouvert $\Omega \subset U$, $f(\Omega)$ est un ouvert de F .

Démonstration. Soit Ω un ouvert de U et $x \in \Omega$. D'après le théorème d'inversion locale, on peut trouver un voisinage ouvert $V_x \subset \Omega$ et un voisinage ouvert W_x de $f(x)$ tels que $f|_{V_x}$ soit une bijection de V_x sur W_x . En particulier, $f(V_x) = W_x$. On en déduit que

$$f(\Omega) = f\left(\bigcup_{x \in \Omega} V_x\right) = \bigcup_{x \in \Omega} f(V_x) = \bigcup_{x \in \Omega} W_x$$

est un ouvert de F . $\square$

* COROLLAIRE 4 (INVERSION GLOBALE). Soit $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) une application injective et de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour tout $x \in U$, df_x est inversible ;
- (ii) $V = f(U)$ est ouvert et f est un $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de U sur V .

Remarque 3. Il se peut que df_x soit inversible pour tout $x \in U$ et que f ne soit pas injective (prendre par exemple $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$).

* C.S:

$$\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Démon:

$$\begin{aligned} \text{Soit } 0 \leq \|x + ty\|^2 &= \|x\|^2 + t^2 \|y\|^2 + 2t \langle x, y \rangle \\ \Delta &= 4 \langle x, y \rangle^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 \\ \Rightarrow |\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

* PK E connexe:

Car E $\mathbb{R}$ -e.v donc connexe par arc

* PK E complet:

Car E est un $\mathbb{R}$ -e.v de dim finie

* Détails:

$$\rightarrow \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \stackrel{\text{TAR}}{=} f'(c) = \langle df_{x+th}(h), h \rangle \geq K \|h\|^2$$

$$\begin{aligned} \bullet f'(t) &= \frac{d}{dt} \langle f(x+th), h \rangle \quad \downarrow \text{application linéaire} \\ &= \left\langle \frac{d}{dt} f(x+th), h \right\rangle \\ &= \left\langle df_{x+th} \left(\frac{d}{dt}(x+th) \right), h \right\rangle \\ &= \langle df_{x+th}(h), h \rangle \end{aligned}$$

Def:

 $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ e. Euclidien de dim n et $\|\cdot\|$ norme associée. $f: E \rightarrow E$ strictement monotone ssi $\exists K > 0$ t.q. $\forall (x, y) \in E^2$,

$$\langle f(x) - f(y), x - y \rangle \geq K \|x - y\|^2 \quad (*)$$

Thrm:

On a pour $f \in \mathcal{C}^1(E)$,① f strict. monotone $\Leftrightarrow \forall x \in E, \forall h \in E, \langle df_x(h), h \rangle \geq K \|h\|^2$ ② f strict. monotone $\Rightarrow f$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféo de E dans E .

Dmo:

① $\Rightarrow$ Soit $x \in E, h \in E$ et $t \in \mathbb{R}^*$ on a:

$$\langle f(x+th) - f(x), th \rangle \geq K t^2 \|h\|^2$$

$$\Rightarrow \langle \frac{f(x+th) - f(x)}{t}, h \rangle \geq K \|h\|^2$$

$$\stackrel{\lim_{t \rightarrow 0}}{\Rightarrow} \langle df_x(h), h \rangle \geq K \|h\|^2$$

② $\Leftarrow$ Posons $\varphi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \langle f(x+th), h \rangle$ pour $h, x \in E$.On a $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(t) = \langle df_{x+th}(h), h \rangle \stackrel{h}{\geq} K \|h\|^2$$

Donc par le TAF:

$$\varphi(1) - \varphi(0) \geq K \|h\|^2 \Leftrightarrow \langle f(x+h) - f(x), h \rangle \geq K \|h\|^2$$

② * M.q. $\forall x \in E, df_x$ inversible:Soit $x \in E$, on a:

$$\langle df_x(h), h \rangle \geq K \|h\|^2, \forall h \in E.$$

On a alors, $\forall h \neq 0, df_x(h) \neq 0 \Rightarrow df_x$ injective.Par dim finie $\Rightarrow df_x$ bij. $\Rightarrow$ inversible.* M.q. f bij de E dans E : $\hookrightarrow f$ inj. par (*) $\hookrightarrow$ M.q. $f(E) = E$: E connexe, on doit m.q. $f(E)$ ouvert et fermé.* df_x inv. donc f ouverte: $f(E)$ ouvert

* On a par C.S:

 $\forall x, y \in E$:

$$|\langle f(x) - f(y), x - y \rangle| \leq \|x - y\| \|f(x) - f(y)\|$$

$$\stackrel{(*)}{\Rightarrow} K \|x - y\|^2 \leq \|x - y\| \|f(x) - f(y)\|$$

$$\Rightarrow K \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \quad (**)$$

Soit $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans $f(E)$.

Par (**) on a:

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, K \|x_p - x_q\| \leq \|f(x_p) - f(x_q)\|$$

Donc, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans E complet: $\exists x^* \text{ t.q. } x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^*$ Donc, par continuité: $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x^*)$.Donc, $f(E)$ complet.Donc, $f(E)$ ferméDonc f bij.* CCL:Par le thrm d'inv. globale, f est un $\mathcal{C}^1$ -difféo de E dans E $\square$